WERKOPDRACHT OVER COMPLEXE GETALLEN

Dr. Luc Gheysens

De goniometrische schrijfwijze van een complex getal

Elk complex getal z = a + bi kan men schrijven onder de vorm

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

r = de modulus van z = mod. z
θ = het argument van z = arg. z.

$$r = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\ .$$

Verklaring. $a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\, i\right)$.

Opmerking. Het complex getal z = 0 + 0i heeft als modulus r = 0 en het argument is onbepaald. Daarom laten we in de onderstaande eigenschappen het complex getal 0 buiten beschouwing.

Eigenschap 1

> Twee toegevoegde complexe getallen (niet gelijk aan nul) hebben gelijke moduli en tegengestelde argumenten.

Bewijs.
Het toegevoegd complex getal van a + bi is gelijk aan a – bi. Het toegevoegd complex getal van r(cos θ + isin θ) is dan

$$r(\cos\theta - i\sin\theta) = r[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$$

Voorbeeld. $1 + \sqrt{3}\,i = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$
$1 - \sqrt{3}\,i = 2[\cos(-60°) + i\sin(-60°)]$.

Eigenschap 2

> Twee complexe getallen, niet gelijk aan nul, die elkaars omgekeerde zijn hebben moduli die elkaars omgekeerde zijn en tegengestelde argumenten.

Bewijs. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, dan is

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)].$$

Voorbeeld. $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$.

Dan is $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)}$

$$= \frac{1-i}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(-45°) + i\sin(-45°)].$$

Eigenschap 3

> Voor twee complexe getallen, niet gelijk aan nul, geldt dat de modulus van het product gelijk is aan het product van de moduli en het argument van het product is gelijk aan de som van de argumenten.

Bewijs.
Stel dat $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i\sin \theta_2)$.
Dan is

$$
\begin{aligned}
z_1.z_2 &= r_1r_2 (\cos \theta_1 + i\sin\theta_1) (\cos \theta_2 + i\sin \theta_2) \\
&= r_1r_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\
&= r_1r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].
\end{aligned}
$$

Voorbeeld.
$z_1 = -\sqrt{3} - i$ en $z_2 = 3i$
Je kan het product direct berekenen : $(-\sqrt{3} - i).\ 3i = 3 - 3\sqrt{3}\,i$.
We passen nu de bovenstaande eigenschap toe :
mod. $z_1 = 2$ en arg. $z_1 = 210°$
mod. $z_2 = 3$ en arg. $z_2 = 90°$.
Dan is mod.$(z_1.\ z_2) = 6$ en arg.$(z_1.\ z_2) = 300°$.
Bijgevolg is

$$
\begin{aligned}
z_1.\ z_2 &= 6(\cos 300° + i \sin 300°) \\
&= 6 (\cos 60° - i \sin 60°) \\
&= 6 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \\
&= 3 - 3\sqrt{3}\,i.
\end{aligned}
$$

Eigenschap 4

Voor de n-de macht van een complex getal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(z \neq 0)$, met n een willekeurig geheel getal, geldt dat $$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)\ .$$

Bewijs.

STAP 1 : de formule klopt voor $n = 0$ want $z^0 = 1$ en ook $r^0(\cos 0\theta + i\sin 0\theta) = 1$.

STAP 2 : de formule klopt voor elk natuurlijk getal $n > 0$, want dit volgt direct uit eigenschap 3.

STAP 3 : de formule klopt voor elk negatief geheel getal $-n$ (met n een positief natuurlijk getal) :

$$\begin{aligned}(r(\cos\theta + i\sin\theta))^{-n} &= [(r(\cos\theta + i\sin\theta))^{-1}]^n \\ &= [r^{-1}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n \quad \text{(wegens eigenschap 2)} \\ &= (r^{-1})^n\,.\,[\cos(-n\,\theta) + i\sin(-n\,\theta)] \quad \text{(wegens STAP 2)} \\ &= r^{-n}[\cos(-n\,\theta) + i\sin(-n\,\theta)]\ .\end{aligned}$$

Voorbeeld. $$\begin{aligned}(-1 + \sqrt{3}\,i)^6 &= [2(\cos 120° + i\sin 120°)]^6 \\ &= 2^6(\cos 720° + i\sin 720°) \\ &= 64.\end{aligned}$$

Toepassing. Voor $r = 1$ bekomt men de zogenaamde

formule van de Moivre: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

Een leuke toepassing van deze formule bekomt men voor het geval dat $n = 2$ is :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \quad \text{(formule van de Moivre).} \quad (1)$$

Anderzijds is ook

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta. \quad (2)$$

Door in (1) en (2) het reëel gedeelte en het imaginair gedeelte aan elkaar gelijk te stellen, vindt men de gekende formules voor de dubbele hoek terug :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \text{en} \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

Eigenschap 5

> Voor twee complexe getallen, niet gelijk aan nul, geldt dat de modulus van het quotiënt gelijk is aan het quotiënt van de moduli en het argument van het quotiënt is gelijk aan het verschil van de argumenten.

Bewijs.
Stel dat $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ en $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$.
Dan is het quotiënt $\frac{z_1}{z_2}$ gelijk aan $z_1 . (z_2)^{-1}$. Hierop kan achtereenvolgens eigenschap 2 en eigenschap 3 worden toegepast.
Hieruit blijkt dat

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

Voorbeeld.
$z_1 = -i$ en $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.
Je kan het quotiënt direct berekenen :

$$\frac{-i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{-i(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i .$$

We passen nu de bovenstaande eigenschap toe :
mod. $z_1 = 1$ en arg. $z_1 = 270°$
mod. $z_2 = 2$ en arg. $z_2 = 60°$.
Dan is mod.(z_1/z_2) = ½ en arg.(z_1/z_2) = 210°.
Bijgevolg is $z_1/z_2 = \frac{1}{2}(\cos 210° + i\sin 210°)$

$$= \frac{1}{2}(-\cos 30° - i\sin 30°)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i .$$

Definitie. $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ is een complexe n-de machtswortel uit een gegeven complex getal $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ als en slechts als $z^n = z_0$.

Toon aan dat elk complex getal $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ n n-de machtswortels heeft en dat voor de modulus r en het argument θ van elk van die n-de machtswortels geldt dat

$$r = \sqrt[n]{r_0}$$

en

$$\theta = \frac{\theta_0}{n} + k.\frac{360°}{n} \quad met\ k \in \{0,1,2,...,n-1\}.$$

Toepassing. Bepaal de achtstemachtswortels uit $-128 + 128\sqrt{3}\,i$.

Oplossing. De goniometrische vorm van $-128 + 128\sqrt{3}\,i$ is gelijk aan 256(cos 120° + i sin 120°).
De acht achtstemachtswortels hebben dan als modulus

$$r = \sqrt[8]{256} = 2$$

en de argumenten zijn bepaald door

$$\theta = 15° + k45° \quad met\ k \in \{0,1,2,...,7\}.$$

Zo bekomen we de achtstemachtswortels $w_0, w_1, \ldots, w_7$:

- k = 0 : $w_0 = 2(\cos 15° + i \sin 15°) = 1,9 + 0,5i$
- k = 1 : $w_1 = 2(\cos 60° + i \sin 60°) = 1 + 1,7i$
- k = 2 : $w_2 = 2(\cos 105° + i \sin 105°) = -0,5 + 1,9i$
- k = 3 : $w_3 = 2(\cos 150° + i \sin 150°) = -1,7 + i$
- k = 4 : $w_4 = 2(\cos 195° + i \sin 195°) = -1,9 - 0,5i$
- k = 5 : $w_5 = 2(\cos 240° + i \sin 240°) = -1 - 1,7i$
- k = 6 : $w_6 = 2(\cos 285° + i \sin 285°) = 0,5 - 1,9i$
- k = 7 : $w_7 = 2(\cos 330° + i \sin 330°) = 1,7 - i$.

Wanneer we deze 8 complexe getallen voorstellen in het vlak van Gauss, blijken dit de hoekpunten te zijn van een regelmatige achthoek, die ingeschreven is in een cirkel met een straal r = 2.

Opgaven.

1 Bereken de volgende uitdrukkingen door gebruik te maken van de goniometrische schrijfwijze van complexe getallen :

a) $(\sqrt{3}-i)^6$

b) $(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^4$

c) $(1+i)^5 - (1-i)^5$

2 Bereken het product van de complexe getallen

$$z_1 = -3 + 3i \text{ en } z_2 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$$

via de goniometrische schrijfwijze en controleer het resultaat door beide complexe getallen direct met elkaar te vermenigvuldigen.

3 Bereken het quotiënt z_1/z_2 als

$$z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i \text{ en } z_2 = 3 + 3i$$

via de goniometrische schrijfwijze en controleer het resultaat door beide complexe getallen op de klassieke manier door elkaar te delen.

4 Bereken de vierdemachtswortels uit $-16i$ en stel ze voor in het vlak van Gauss.

5 Bereken de derdemachtswortels uit $2(i - 1)$ en stel ze voor in het vlak van Gauss.

6 Gebruik de formule van de Moivre in combinatie met de formule voor $(a+b)^3$ om de volgende formules te bewijzen :

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \text{en} \quad \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

SUCCES!