FORMULARIUM VOOR ANALYTISCHE RUIMTEMEETKUNDE

1 VECTOREN

- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (formule van Chasles-Möbius)
- $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$ (notatie met plaatsvectoren)

- componenten van vectoren : $co(\vec{P}) = (x, y, z) \Leftrightarrow \vec{P} = x.\vec{E}_1 + y.\vec{E}_2 + z.\vec{E}_3$

$co(\vec{P} + \vec{Q}) = co(\vec{P}) + co(\vec{Q})$ en $co(k.\vec{P}) = k.co(\overrightarrow{P})$

of

$co(k.\vec{P} + l.\vec{Q}) = k.co(\vec{P}) + l.co(\overrightarrow{Q})$

(lineariteit)

- M is het midden van het lijnstuk [AB] : $co(\overrightarrow{M}) = \dfrac{co(\vec{A}) + co(\vec{B})}{2}$

$$(x_M, y_M, z_M) = (\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2})$$

- Z is het zwaartepunt van driehoek ABC : $co(\vec{Z}) = \dfrac{co(\vec{A}) + co(\vec{B}) + co(\vec{C})}{3}$

$$(x_Z, y_Z, z_Z) = (\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3})$$

2 VERGELIJKINGEN VAN RECHTEN

P(x,y,z) is een willekeurig punt op de rechte door de punten $P_1\,(x_1,y_1,z_1)$ en $P_2(x_2,y_2,z_2)$:

- Richtingsvector van de rechte P_1P_2 : de vector $\overrightarrow{P_1P_2}$

- Richtingsgetallen van de rechte P_1P_2 : $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

- Vectoriële vergelijking : $\overrightarrow{P_1P} = k.\overrightarrow{P_1P_2}$ met $k \in IR$

of

$\vec{P} = \vec{P_1} + k.(\vec{P}_2 - \vec{P}_1)$ met $k \in IR$

- Parametervergelijkingen :

$$\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) \end{cases} \qquad \text{met} \quad k \in IR$$

- Een stelsel cartesiaanse vergelijkingen :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

- Vergelijkingen van de coördinaatassen :

x-as : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y-as : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ z-as : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

3 VERGELIJKINGEN VAN VLAKKEN

P(x,y,z) is een willekeurig punt op het vlak α bepaald door de drie niet-collineaire punten $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ en $P_3(x_3,y_3,z_3)$

- Richtingsvectoren van α : $\overrightarrow{P_1P_2}$ en $\overrightarrow{P_1P_3}$
- Richtingsgetallen van α : $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ en $(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

- Vectoriële vergelijking van α : $\overrightarrow{P_1P} = k.\overrightarrow{P_1P_2} + l.\overrightarrow{P_1P_3}$ met $k, l \in IR$

of

$$\vec{P} = \vec{P_1} + k.(\vec{P_2} - \vec{P_1}) + l.(\vec{P_3} - \vec{P_1}) \quad \text{met} \quad k, l \in IR$$

- Parametervergelijkingen :

$$\begin{cases} x = x_1 + k(x_2 - x_1) + l(x_3 - x_1) \\ y = y_1 + k(y_2 - y_1) + l(y_3 - y_1) \\ z = z_1 + k(z_2 - z_1) + l(z_3 - z_1) \end{cases} \qquad \text{met} \quad k, l \in IR$$

- Determinantvergelijking :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{of} \qquad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- Het vlak door het punt $P(x_1,y_1,z_1)$ met normaalvector $\overrightarrow{N}(a,b,c)$:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 .$$

- Vergelijking van de coördinaatvlakken :

xy-vlak : $z = 0$ xz-vlak : $y = 0$ yz-vlak : $x = 0$

- Het vlak door de punten (l,0,0), (0,m,0) en (0,0,n) (vergelijking op de assegmenten) :

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 1$$

4 EVENWIJDIGHEID

- Evenwijdige vectoren : $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \exists k \in IR : \overrightarrow{CD} = k.\overrightarrow{AB}$

- Evenwijdige rechten :

de rechte l_1 met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1)
is evenwijdig met
de rechte l_2 met richtingsgetallen (a_2, b_2, c_2)
$\Updownarrow$
$\exists r \in IR_0 : a_2 = ra_1 \quad en \quad b_2 = rb_1 \quad en \quad c_2 = rc_1$

of als a_2 en b_2 en c_2 verschillend zijn van nul : $l_1 // l_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

- Een rechte en een vlak :

de rechte l met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1)
is evenwijdig met
het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$
$\Updownarrow$
$ua_1 + vb_1 + wc_1 = 0$

- Twee vlakken :

het vlak $\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$
is evenwijdig met
het vlak $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$
$\Updownarrow$
$\exists r \in IR_0 : u_2 = ru_1 \quad en \quad v_2 = rv_1 \quad en \quad w_2 = rw_1$

of als u_2 en v_2 en w_2 verschillend zijn van nul : $\alpha // \beta \Leftrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{w_1}{w_2}$

5 TWEE OPMERKINGEN

Opmerking 1

Als de rechte s de snijlijn is van de vlakken

$\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$,

dan heeft s als richtingsgetallen

$$\left(k.\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}, -k.\begin{vmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{vmatrix}, k.\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right) \quad \text{met} \quad k \in IR_0$$

Opmerking 2

Als $\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$

twee snijdende vlakken zijn,

dan bepalen ze een vlakkenwaaier met als vergelijking

$k(u_1x + v_1y + w_1z + t) + l(u_2x + v_2y + w_2z + t_2) = 0$ met $k, l \in IR$

6 LENGTE EN AFSTAND – VERGELIJKING VAN EEN BOL

- De afstand van het punt $P(x_1,y_1,z_1)$ tot de oorsprong is de lengte (of norm) van de vector $\overrightarrow{OP}$ en is de lengte van het lijnstuk [OP] :

$$d(0,P) = \left\| \overrightarrow{OP} \right\| = \left| OP \right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

- De afstand van het punt $P_1(x_1,y_1,z_1)$ tot het punt $P_2(x_2,y_2,z_2)$ is de lengte (of norm) van de vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ en is de lengte van het lijnstuk $[P_1P_2]$:

$$d(P_1P_2) = \left\| \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \left| P_1P_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

- De afstand van het punt $P(x_1,y_1,z_1)$ tot het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$:

$$d(P,\alpha) = \frac{\left| ux_1 + vy_1 + wz_1 + t \right|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

- De vergelijking van de bol met middelpunt $M(x_1,y_1,z_1)$ en straal r :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r^2$$

7 LOODRECHTE STAND

- Loodrechte stand van twee vectoren :

$$\overrightarrow{V_1}(a_1,b_1,c_1) \perp \overrightarrow{V_2}(a_2,b_2,c_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\overrightarrow{V_1} \, . \, \overrightarrow{V_2} = 0 \text{ (scalair product)}$$
$$\Updownarrow$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

- Loodrechte stand van twee rechten :

de rechte l_1 met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1)
staat loodrecht op
de rechte l_2 met richtingsgetallen (a_2, b_2, c_2)

$$\Updownarrow$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

- De vector $\overrightarrow{N}(u,v,w)$ is een normaalvector van het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$

- Loodrechte stand van een rechte en een vlak :

de rechte l met richtingsgetallen (a, b, c)
staat loodrecht op
het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$

$$\Updownarrow$$
$$\exists r \in IR_0 : a = ru \quad en \quad b = rv \quad en \quad c = rw$$

of als u en v en w verschillend zijn van nul : $l \perp \alpha \Leftrightarrow \frac{a}{u} = \frac{b}{v} = \frac{c}{w}$

- Loodrechte stand van twee vlakken :

het vlak $\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$
staat loodrecht op
het vlak $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$

$$\Updownarrow$$
$$u_1u_2 + v_1v_2 + w_1w_2 = 0$$

- Een stelsel cartesiaanse vergelijkingen van de loodlijn uit $P(x_1,y_1,z_1)$ op het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$:

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v} = \frac{z - z_1}{w}$$

(met u en v en w verschillend van nul)

- De vergelijking van het loodvlak door $P(x_1,y_1,z_1)$ op de rechte l met richtingsgetallen (a,b,c) :

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

8 HOEKEN

- De (niet-stompe) hoek θ tussen de vectoren $\overrightarrow{V_1}(a_1,b_1,c_1)$ en $\overrightarrow{V_2}(a_2,b_2,c_2)$ is gelijk aan de hoek tussen de rechte l_1 met richtingsgetallen (a_1, b_1, c_1) en de rechte l_2 met richtingsgetallen (a_2, b_2, c_2) en is bepaald door :

$$\cos\theta = \frac{\left| a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 \right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\ .\ \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

- De hoek tussen de rechte l met richtingsgetallen (a, b, c) en het vlak $\alpha : ux + vy + wz + t = 0$ is het complement van de hoek θ tussen de richtingsvector $\vec{V}$ (a, b, c) van de rechte l en de normaalvector $\vec{N}$ (u, v, w) van het vlak α

- De hoek tussen de vlakken $\alpha : u_1x + v_1y + w_1z + t_1 = 0$ en $\beta : u_2x + v_2y + w_2z + t_2 = 0$ is de hoek tussen de normaalvectoren $\overrightarrow{N_1}$ (u_1,v_1,w_1) en $\overrightarrow{N_2}$ (u_2,v_2,w_2) .